V Міжнародна науково-практична конференція «Моделювання, керування та інформаційні технології»

«Теорема Шпернера»

Студент: Тарасенко С.А.
Науковий керівник: Рибак О.В.

ПЛАН

1) Теоретичні відомості
2) Постановка задачі
3) Прикладне застосування
4) Підхід до рішення поставленої задачі
5) Рішення поставленої задачі на частинних випадках мультимножини
6) Приклад зваження графу базуючись на отриманих результатах
7) Висновки

Теоретичне підґрунтя

Теорема Шпернера

Маємо набір підмножин $M_1, \ldots, M_k$ множини $\{1,...,n\}$, відомо що
$\forall i, j \;\; (i \neq j)$: $M_i \not\subset M_j$, тобто маємо *антиланцюг* довжини k.
$k \leq C_n^{[\frac{n}{2}]}$

Задача: узагальнити теорему для мультимножинного випадку.

Теоретичне підґрунтя

Нехай $X \subset V$, множина сусідів X (англ. neighborhood): $N(X) = y \in V \mid (x, y) \in E, x \in X$

Теорема Холла

Повне паросполучення існує тоді і тільки тоді, коли $\forall A \subset L$ виконується $|A| \leqslant |N(A)|$.
L - множина вершин лівої долі

Прикладне застосування

«Схема розподілення секрету»

Нехай $X = \{1,...,n\}$ — скінчена множина.
Нехай 2^X — множина всіх підмножин множини X (булеан множини X), тоді 2^X можна розбити на множину «сильних» (позначимо літерою S - «strong») та «слабких» (позначимо літерою W - «weak»), при цьому повинні виконуватись такі правила:

1)$W \cup S = 2^X$

2)$W \cap S = \varnothing$

3)$\forall A \in W, \forall B \in S$: $B \not\subset A$

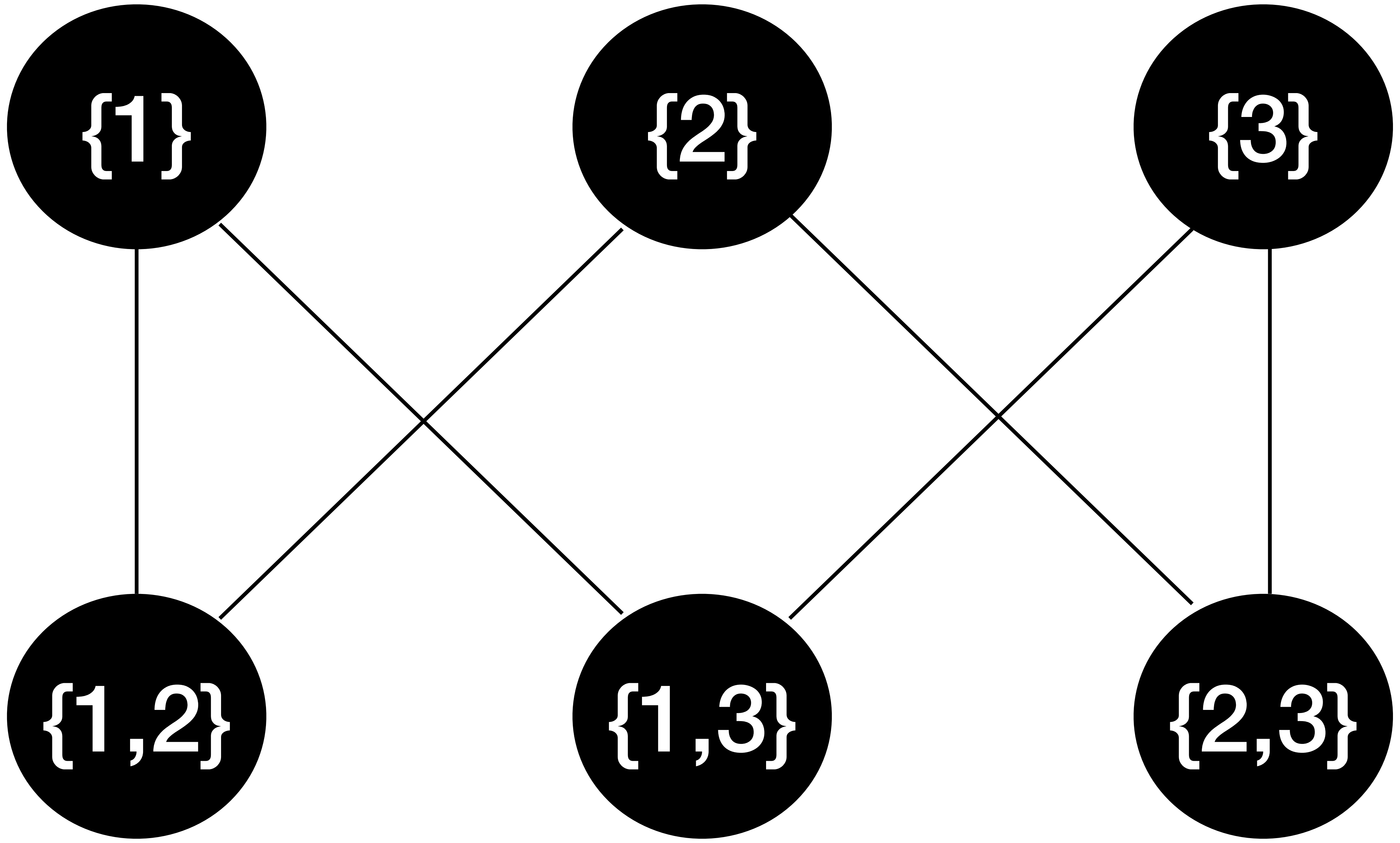
Приклад: нехай $n = 3$, та нехай:

$W = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$S = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Приклад зваження графу, який базується на доведенні, використовуючи теорему Холла

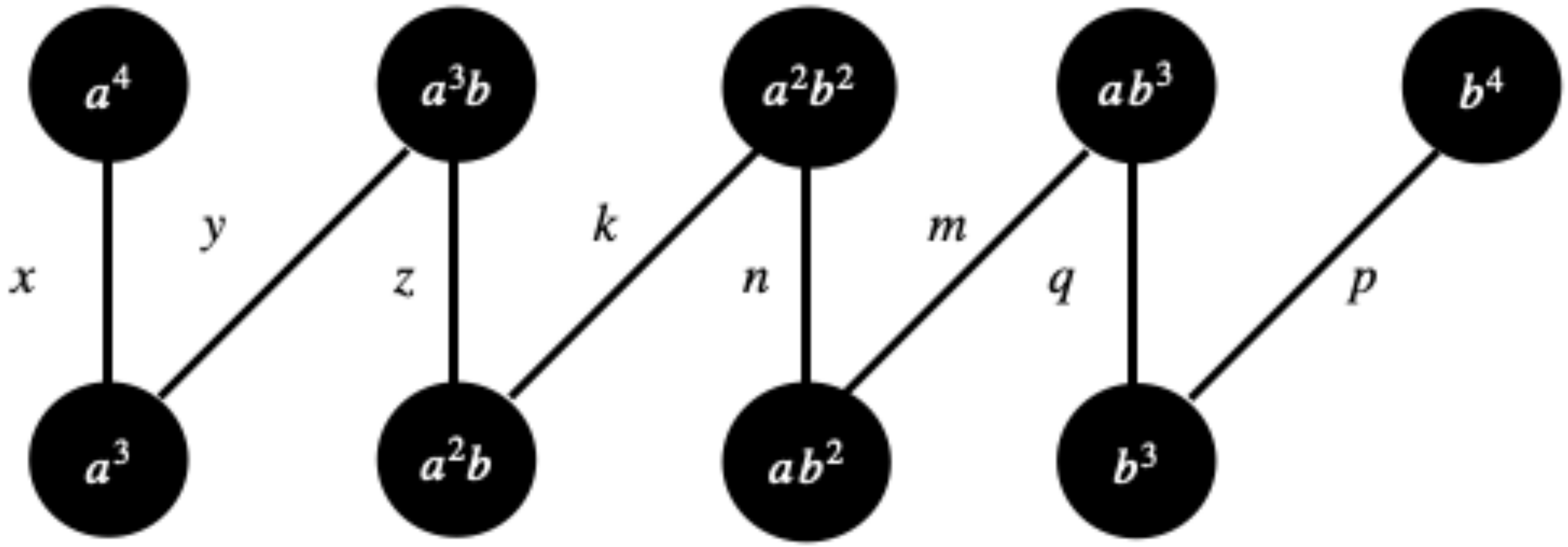
Нехай $M = \{1,2,3\}$, розглянемо набір $M_1 = \{1\}, M_2 = \{2\}, M_3 = \{3\}$, доповнемо ці множини до двоелементних, тобто $M_{11} = \{1,2\}, M_{12} = \{1,3\}, M_{13} = \{2,3\}$, побудуємо граф:



Ускладнений випадок теореми Шпернера

Зваження графу використовуючи ваги
Частинний випадок №1

$M = \{a^n, b^m\}$ — мультимножина, яка складається з елементів a та b, кратності n та m відповідно. Розглянемо підхід до вирішення задачі на прикладі множини $M = \{a^5, b^4\}$ (Перехід від 3-елементних до 4-елементних підмножин):



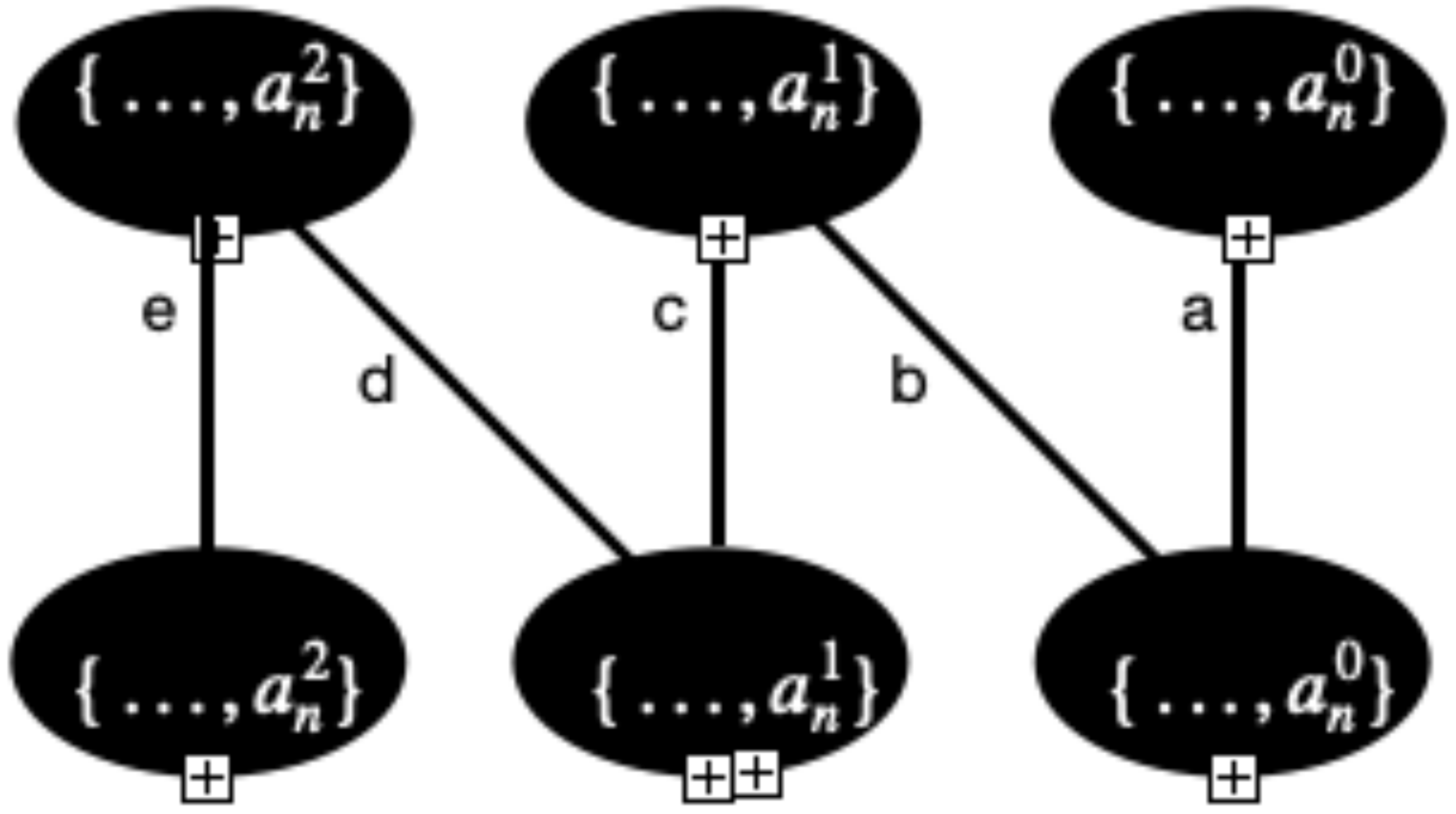
Частинний випадок №1

$$\begin{cases} x = y + z = k + n = m + q = p = s\ (sum\ 1) \\ x + y = z + k = n + m = p + q = t\ (sum\ 2) \end{cases}$$

В нашому випадку $s = 4,\ \ t = 5$, отримаємо:

$$\begin{cases} x = 4, \\ y = 1, \\ z = 3, \\ k = 2, \\ n = 2, \\ m = 3, \\ q = 1, \\ p = 4 \end{cases}$$

Частинний випадок №2 ($M = \{a_0, a_1, \ldots, a_n^2\}$)



$$\begin{cases} a = m + (n - k) \\ c = m - (n + 1) \\ e = m + k \\ b = n^2 + nk + n \\ d = 2n^2 - nk + n \end{cases} \quad (**), \qquad m = n^2 - nk + k^2$$

n — кількість унікальних елементів множини

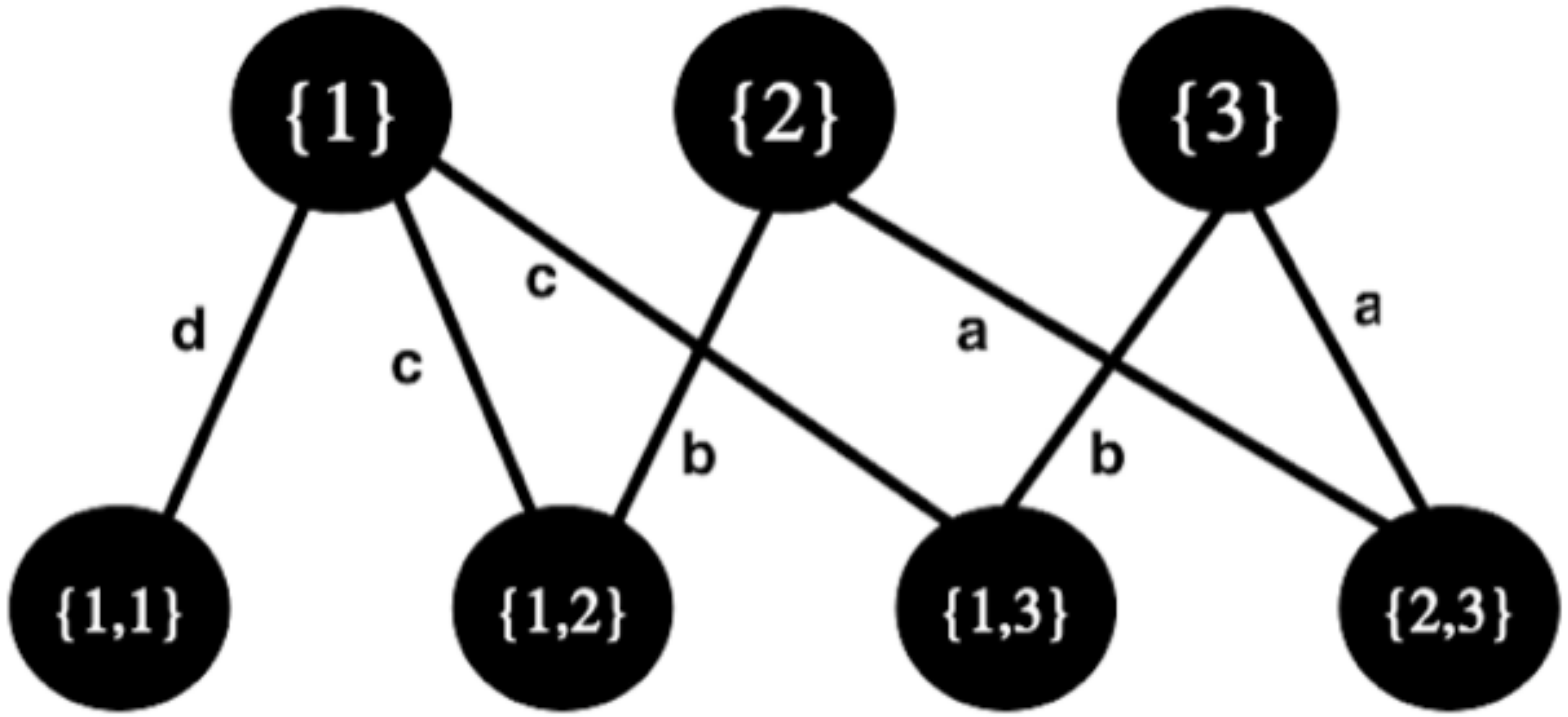
k — потужність множин верхньої долі

Приклад

Приклад:

Дана множина $M = \{1,1,2,3\}$, зважимо граф, опишемо перехід від одноелементних підмножин до двоелементних, тоді $n = 3, \quad k = 1, m = n^2 - nk + k^2 = 3^2 - 3 * 1 + 1^2 = 7$

$$\begin{cases} a = m + (n - k) = 7 + (3 - 1) = 9 \\ c = m - (n + 1) = 7 - (3 + 1) = 3 \\ e = m + k = 7 + 1 = 8 \\ b = n^2 + nk + n = 3^2 + 3 * 1 + 3 = 15 \\ d = 2n^2 - nk + n = 2 * 3^2 - 3 * 1 + 3 = 18 \end{cases}$$



Зараз ведеться робота

- $A = \{a^n, b, c\}, A = \{a_0^3, a_1, \ldots, a_n\}$
- Статистичний підрахунок кількості антиланцюгів для мультимножини заданого виду C_{n+k-1}^k
- Застосування мультимножинного випадку теореми для задач «Теорії Голосувань»
- Часткові випадки зваження графів у задачі «Розподілення ресурсів»

Висновки

- Розглянуто прикладне застосування теореми Шпернера в задачі «Схема розподілення секрету»
- Приведено спосіб доведення ускладненого випадку теореми Шпернера
- Розглянуто і доведено ускладнену теорему Шпернера для двох частинних випадків мультимножини.
- Розглянуто можливість узалагьнити доказ теореми на більшій кількості частинних випадків

Q/A session

Дякую за увагу!